

ONDES ET VIBRATIONS. — Étude expérimentale des cordes pourvues de raideur.
 Note de Xavier Boutillon, Jean-Christophe Radier, Claude Valette et Michèle Castellengo,
 présentée par Henri Cabannes.

Remise le 20 février 1984, acceptée le 12 mars 1984.

Toute tentative de courbure sur une corde raide engendre une force qui s'ajoute à celle causée par la tension. Ceci a trois conséquences sur le régime de fonctionnement de la corde vibrante : une modification des fréquences propres, leur évolution avec l'amplitude du mouvement et l'apparition d'efforts sur les supports d'extrémité, à des fréquences multiples des fréquences propres du mouvement. Nous avons mis en évidence la vibration d'octave, mesuré précisément l'évolution rapide des fréquences propres et calculé l'inharmonicité beaucoup plus vite que par les méthodes classiques.

WAVES AND VIBRATIONS. — Experimental Study of Stiff Vibrating Strings.

When studying the motion of a piano string under tension one must consider the elastic internal force in addition to the restoring force due to the tension. This leads to three different effects for a vibrating string: the eigenfrequencies are modified, they vary with the amplitude, and the force exerted by the string on the support oscillates at harmonic frequencies of the motion. We have shown from our experiment that the octave vibration exists; in addition we have measured the variation of the eigenfrequencies as a function of time, and have calculated the inharmonicity using a faster method.

Les cordes de piano actuellement utilisées sont en acier; les contraintes de flexion qui s'opposent à leur déformation, ne sont pas négligeables devant celles dues à la tension. Pour $dy/dx \ll 1$, l'équation du mouvement est celle utilisée pour une poutre sous tension et s'écrit :

$$(1) \quad -EI d^4 y/dx^4 + T d^2 y/dx^2 = \varepsilon d^2 y/dt^2,$$

avec ε , masse linéique; T , tension de la corde à l'instant t ; E , module d'Young; I , moment d'inertie de la section droite.

I. INHARMONICITÉ. — Dans l'approximation $T = T_0$ (tension au repos), valable pour de faibles amplitudes, avec les conditions aux limites $y=0$, $d^2 y/dx^2=0$, le calcul des fréquences propres de la corde donne : $f_n = n f \cdot (1 + B n^2)^{1/2}$ où $f = (1/2L) \cdot (T_0/\varepsilon)^{1/2}$, L est la

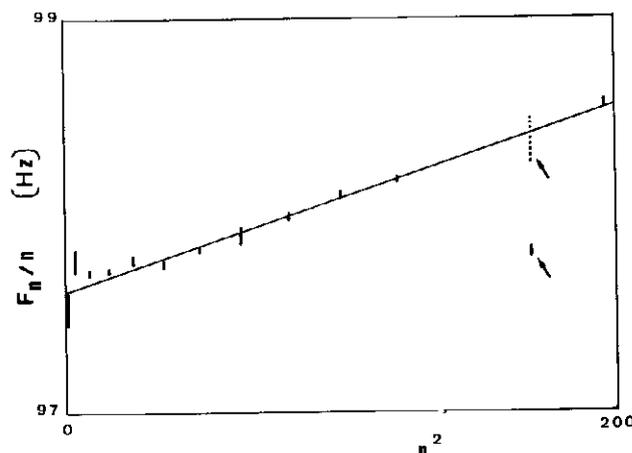


Fig 1. — Inharmonicité d'une corde de Sol 2. Le 13^e partiel comporte une composante harmonique intense; la composante inharmonique, plus faible, déterminée par ASD n'est pas mesurable par les techniques classiques.

Fig. 1. — Inharmonicity of a G2 string. The 13th partial has a strong harmonic component; the weaker inharmonic component determined by ASD is not measurable by classical techniques.

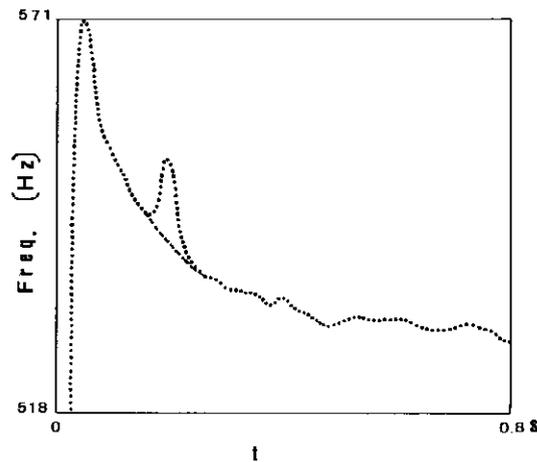


Fig. 2. — Décroissance du son émis par un banc de corde; vers 0,2 s. il y a interférence destructive entre un mode d'extinction rapide et un autre plus lent. L'ASD permet de suivre avec précision l'évolution rapide de la fréquence.

Fig. 2. — Decrease of the sound emitted by a string bench; at approximately 0.2 sec there is a destructive interference between a fast decreasing mode and a slower decreasing mode. The ASD allows one to follow the fast evolution of the frequency.

longueur vibrante et $B = (\pi^2 EI)/(T_0 L^2)$ caractérise l'inharmonicité. Le relevé complet d'inharmonicité a été effectué ⁽¹⁾ sur un piano par des mesures analogiques et au moyen de FFT, une seule corde sur les deux ou trois associées à une note étant autorisée à vibrer. Les résultats obtenus confirment ceux de R. W. Young [1].

L'analyse spectrale différentielle (ASD) [2] permet d'effectuer des déterminations précises de fréquence sur des signaux brefs, ce qui allège considérablement les moyens de calcul nécessaires à ces mesures (en temps comme en matériel). La figure 1 montre les résultats de l'analyse du Sol 2. Ils concordent avec ceux obtenus auparavant par la méthode analogique et par FFT. Sur ces précédentes mesures, le treizième partiel semblait ne pas suivre la loi d'inharmonicité; l'ASD permet d'y détecter deux composantes. La fréquence de la composante la plus intense est harmonique du fondamental (sans qu'on puisse en déterminer clairement l'origine); la fréquence de la composante la plus faible (impossible à déterminer par FFT) tombe sur la droite d'inharmonicité de façon tout à fait satisfaisante.

II. ÉVOLUTION DE LA FRÉQUENCE. — En fait, T dépend de la longueur effective de la corde en mouvement (loi de Hooke), donc du carré de l'amplitude de la vibration.

EXPLICATION DE LA PLANCHE

Fig. 3. — Sonagramme des composantes de la force F exercée par la corde sur un appui; $F_{||}$ (projection de F sur la direction de la corde au repos) produit la vibration d'octave.

Fig. 3. — Sonagram of the components of the force F exerted by the string on the support; $F_{||}$ (projection of F on the direction of the string at rest) creates the octave vibration.

TYPE B/65 SONAGRAM © KAY ELECTRONICS CO. PINE BROOK, N. J.

1200

Freq.
(Hz)

F ⊥

$f_{2\perp}$

$f_{1\perp}$

0

TYPE B/65 SONAGRAM © KAY ELECTRONICS CO. PINE BROOK, N. J.

1200

F //

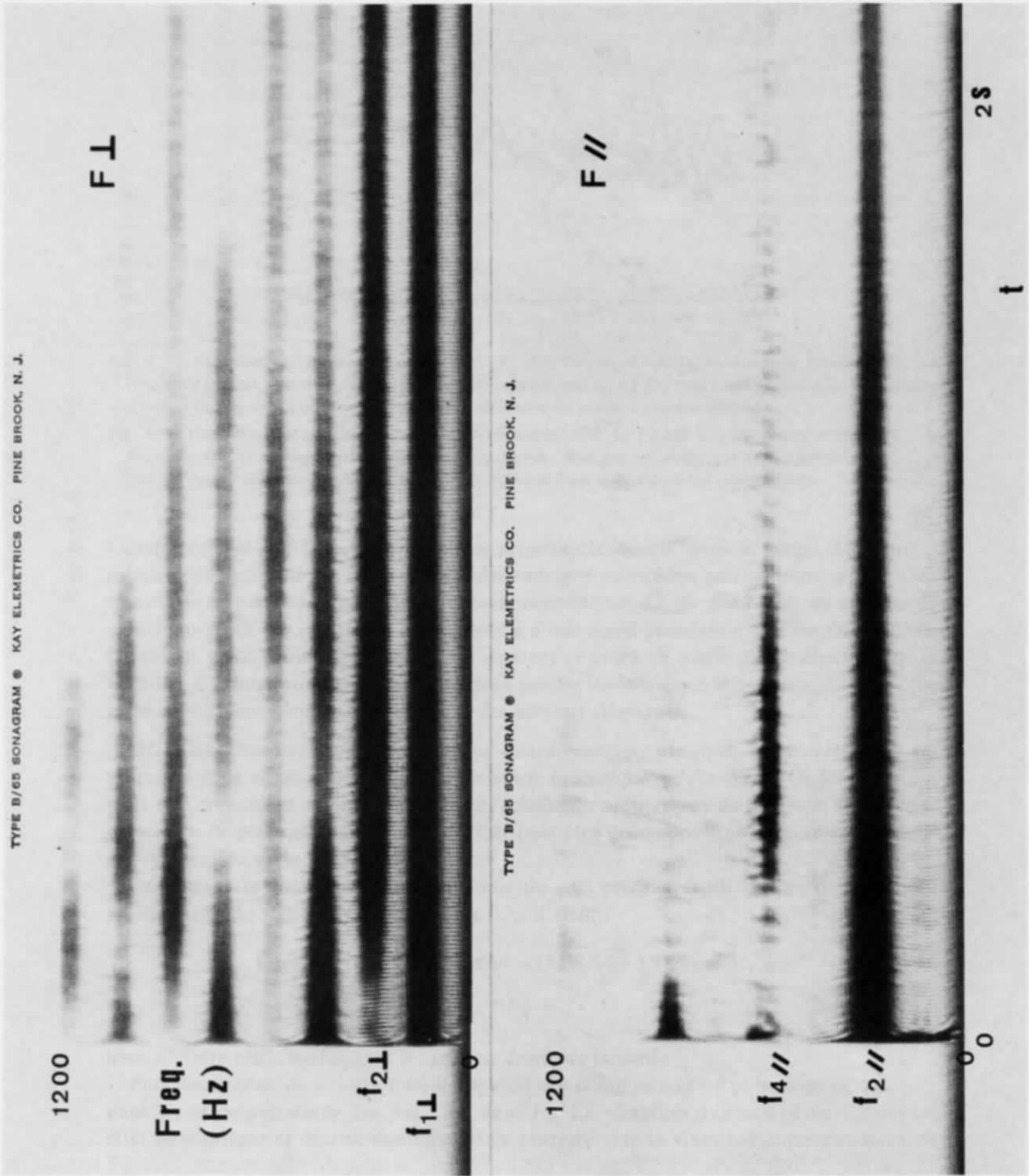
$f_{4//}$

$f_{2//}$

0

2 S

t



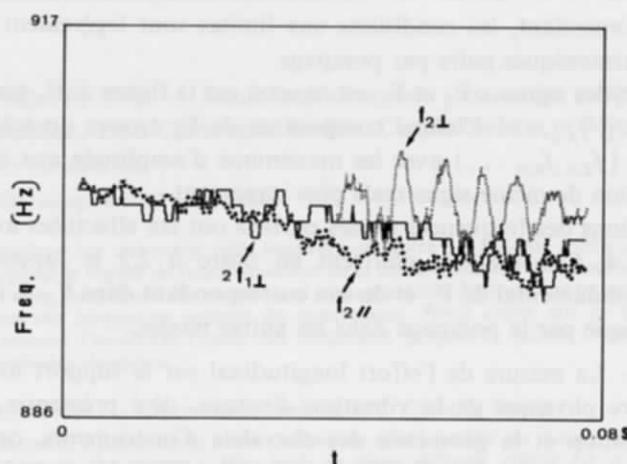


Fig. 4. — Comparaison des partiels de $F_{//}$ et de F_{\perp} déterminées par ASD; le deuxième partial de F_{\perp} , de fréquence $f_{2\perp}$, est absent au début du signal. On constate que $f_{2//} \approx 2 f_{1\perp}$ tandis que $f_{2\perp} > 2 f_{1\perp}$; la vibration d'octave (harmonique) est donc physiquement différente du partial 2 (inharmonique).

Fig. 4. — Comparison of the eigenfrequencies determined by ASD for $F_{//}$ and F_{\perp} ; the second partial of F_{\perp} , of frequency $f_{2\perp}$, is missing at the beginning of the signal. One can see that $f_{2//} \approx 2 f_{1\perp}$ whereas $f_{2\perp} > 2 f_{1\perp}$; thus the octave vibration (harmonic) is physically different from a second partial (inharmonic).

Comme celle-ci s'atténue, les fréquences propres décroissent dans le temps. La figure 2 montre l'évolution de la fréquence fondamentale du son émis par un banc monté avec une corde de piano pas trop tendue et fortement excitée. Le pic à 0,2 s est un artefact de calcul par ASD, dû au saut de phase associé à une quasi-annulation de l'amplitude de ce partial; il y a à cet instant interférence destructive entre un mode d'extinction rapide et un autre d'extinction plus lente. La mesure précise de fréquence sur un signal qui évolue aussi rapidement n'est pas possible par des moyens classiques.

III. VIBRATION D'OCTAVE. — Dans les instruments de musique, on n'entend pas la vibration de la corde mais celle d'une structure mécanique qu'elle excite. Or leur jonction peut être considérée comme immobile à l'échelle du mouvement de la corde. La force F exercée en ce point est donc égale à $-T$ et peut être décomposée en $F_{//}$ (projection de F sur la direction de la corde au repos) et F_{\perp} .

Examinons la contribution à cette force du seul premier mode propre de la corde : $y = a \cdot \sin(\pi x/L) \cdot \cos(\omega_1 t)$. Tous calculs faits il vient :

$$F_{//} = T_0 + (ES/4 - T_0/2) \alpha + (-11 ES/64 + 3 T_0/8) \alpha^2 + \dots,$$

$$F_{\perp} = F_{//} \cdot \alpha^{1/2},$$

avec $\alpha^{1/2} = (\pi a/L) \cdot \cos(\omega_1 t)$ et S : section droite de la corde.

Pour tout mode de pulsation ω , il apparaît des composantes de pulsations $\omega, 3\omega, \dots$ dans F_{\perp} et de pulsations $2\omega, 4\omega, \dots$ dans $F_{//}$. La vibration d'octave (dans $F_{//}$) est un effet quadratique et décroît donc deux fois plus vite que la vibration correspondante de F_{\perp} .

Pour voir si ce modèle était correct, nous avons réalisé un banc muni d'une tête de mesure comprenant deux jauges de contrainte; elles y sont disposées de sorte que la somme de leurs indications mesure $F_{//}$ et la différence F_{\perp} . La corde est excitée au milieu

par pincement. Cependant, les conditions aux limites sont légèrement disymétriques et font naître des harmoniques pairs par pompage.

Le sonagramme des signaux $F_{//}$ et F_{\perp} est montré sur la figure 3. F_{\perp} possède des partiels aux fréquences $f_{1\perp}, f_{2\perp}, \dots$. Chaque composante de F_{\perp} trouve un écho dans $F_{//}$ à une fréquence double ($f_{2//}, f_{4//}, \dots$) avec les maximums d'amplitude aux mêmes instants et un taux de variation de même signe mais plus important.

Les déterminations des fréquences de ces partiels ont été effectuées avec l'ASD et sont présentées figure 4. Ces analyses chiffrent en outre à 2,3 le rapport des temps de décroissance du fondamental de F_{\perp} et de son correspondant dans $F_{//}$. L'écart à la valeur 2 du modèle s'explique par le pompage dans les autres modes.

CONCLUSION. — La mesure de l'effort longitudinal sur le support met directement en évidence la nature physique de la vibration d'octave, déjà pressentie par E. Leipp [3]. Suivant la disposition et la géométrie des chevalets d'instruments, on devrait pouvoir transmettre plus ou moins cette vibration au son; l'analyse des sons de piano comporte effectivement des pics harmoniques faibles présents à côté des pics inharmoniques plus intenses.

Nous remercions Pierre Péro qui a suscité ce travail et dont l'aide matérielle et les conseils attentifs nous ont été précieux.

(¹) Travail effectué à l'I.R.C.A.M., Paris par X. Boutillon sous la direction de G. Weinreich en 1980.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. W. YOUNG, *J.A.S.A.*, 24, n° 3, 1952, p. 267.
- [2] P. PERIO, S. CHAINTREUIL, F. WU, V. GIBIAT et P. JARDIN, *Comptes rendus*, 296, série II, 1983, p. 33-38.
- [3] E. LEIPP, *La harpe celtique (Bulletin G.A.M., n° 73, 1974)*.

Laboratoire d'Acoustique (E.R.A., n° 537 du C.N.R.S.),
Université Paris-VI, Tour 66, 5^e étage, 4, place Jussieu, 75005 Paris.